

149 214
206 215
219

16,00

Gouadon
p. 330, 333, 341

Minimisation de $\|\cdot\|_2$ sur $SL_n(\mathbb{R})$

Proposition: Soit $\beta: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, E, F, G $\mathbb{R}$ -E.V. de dim finie. Alors β est différentiable.

Puisque E, F de dimension finie, $\exists C > 0 \forall (h, k) \in E \times F \quad \|\beta(h, k)\| \leq C \|h\| \|k\|$. On a $\forall (x, y), (h, k) \in E \times F$
 $\beta(x+h, y+k) = \beta(x, y) + \beta(x, k) + \beta(h, y) + \beta(h, k)$, avec $\beta(h, k) = o(\|(h, k)\|)$. Donc $d_{(x,y)} \beta(h, k) = \beta(x, k) + \beta(h, y)$.

Théorème: $\det$ est C^∞ et $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R})$, on a $d_A \det(H) = \text{Tr}({}^t \text{com}(A)H)$.

$\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ est C^∞ car dépend polynomialement des coefficients des matrices. Alors, on a

$$\forall i \in \mathbb{R}^+, \forall i, j \in [1, n], \quad \det(I_n + E_{ij}) - \det(I_n) = \frac{1+1-1}{1} 1_{i=j} + \frac{1-1}{1} 1_{i \neq j} = \delta_{ij} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta_{ij}.$$

$$\text{Donc } \forall H \in M_n(\mathbb{R}), \quad d_{I_n} \det(H) = \sum_{i,j} d_{E_{ij}} \det(I_n) H_{ij} = \sum_{i,j} \delta_{ij} H_{ij} = \sum_{i=1}^n H_{ii} = \text{Tr}(H).$$

De plus $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R})$, on a

$$\det(A+H) = \det(A) \det(I_n + A^{-1}H) = \det(A) (\det(I_n) + d_{I_n} \det(A^{-1}H) + o(\|H\|)) = \det(A) + \det(A) \text{Tr}(A^{-1}H) + o(\|H\|)$$

Donc $d_A \det(H) = \text{Tr}({}^t \text{com}(A)H)$. Finalement, $A \mapsto d_A \det$ et $A \mapsto (H \mapsto \text{Tr}({}^t \text{com}(A)H))$ sont

continues sur $M_n(\mathbb{R})$ et coïncident sur $GL_n(\mathbb{R})$. Par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$, on en

déduit que $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \forall H \in M_n(\mathbb{R}) \quad d_A \det(H) = \text{Tr}({}^t \text{com}(A)H)$

Application: On munit $M_n(\mathbb{R})$ de $\|M\|_2 := \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Alors $SO_n(\mathbb{R}) = \inf_{M \in SL_n(\mathbb{R})} \|M\|_2$.

On remarque $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \|M\|_2^2 = \text{Tr}({}^t M M)$. On pose $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ et $g: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

On minimise donc f sur $g^{-1}(0)$.

$$M \mapsto \text{Tr}({}^t M M) \quad M \mapsto \det(M) - 1$$

Puisque $SL_n(\mathbb{R})$ fermé de $M_n(\mathbb{R})$ en dimension finie, ce minimum $d(0, SL_n(\mathbb{R}))$ est atteint en

$A \in SL_n(\mathbb{R})$. De plus, $f, g \in C^1(M_n(\mathbb{R}))$ avec $\forall H \in M_n(\mathbb{R}), d_A f(H) = 2 \text{Tr}({}^t A H)$ et $d_A g(H) = \text{Tr}(A^{-1}H)$

Puisque $d_A g \neq 0$, d'après le théorème des extrema liés, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $d_A f = \lambda d_A g$. Donc

$$\forall H \in M_n(\mathbb{R}), \quad 2 \text{Tr}({}^t A H) = \lambda \text{Tr}(A^{-1}H) \Leftrightarrow \forall H \in M_n(\mathbb{R}), \text{Tr}((2 {}^t A - \lambda A^{-1})H) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2A^t - \lambda A^{-1} = 0, \text{ car } (A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A B) \text{ produit scalaire}$$

$$\Leftrightarrow 2A^t A = \lambda I_n, \quad 2^{\frac{n}{2}} \det(A^t A) = 2^{\frac{n}{2}} = \lambda^n, \quad 2 \text{Tr}(A^t A) = n\lambda \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 2 \text{ et } A^t A = I_n.$$

Donc $A \in SO_n(\mathbb{R})$ et $f(A) = \text{Tr}({}^t A A) = n$. Réciproquement, $\forall M \in SO_n(\mathbb{R})$ on a $f(M) = n$.

Lemme: Soit $B: E \times F \rightarrow G$ bilinéaire, $E, F, G \in \mathcal{E}V$ de dim finie. Alors B continue.

Soit $(e_i)_{i=1}^n, (f_j)_{j=1}^m$ base de E et de F . On pose $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$,

pareil pour F . On a $\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E, \forall y = \sum_{j=1}^m y_j f_j \in F$:

$$\begin{aligned} \|B(x, y)\| &= \|B(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^m y_j f_j)\| = \|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i y_j B(e_i, f_j)\| \leq \sum_{i,j} |x_i| |y_j| \|B(e_i, f_j)\| \\ &\leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty, \text{ où } C := \sum_{i,j} \|B(e_i, f_j)\| > 0 \text{ constante} \end{aligned}$$

Alors $\forall (x_n, y_n) \in (E \times F)^{\mathbb{N}}, (x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x, y)$, on a

$$\|B(x_n, y_n) - B(x, y)\| = \|B(x_n - x, y_n) + B(x, y_n - y)\| \leq C \|x_n - x\|_\infty \|y_n\|_\infty + C \|x\|_\infty \|y_n - y\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Où $\exists C > 0$ tel que $C \|x\|_\infty \|y\|_\infty \leq C \|x\|_\infty \|y\|_\infty$ (eq norme) et $(y_n)_n$ bornée car cv.

Lemme: $GL_n(\mathbb{R})$ ouvert dense dans $M_n(\mathbb{R})$

On a $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ ouvert. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Si $\det A \neq 0$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Sinon

on pose $\forall k \in \mathbb{N}^* A_k = A + \frac{1}{k} I_n$. Puisque $|Sp(A)| \leq n$ fini, $\exists k_0 \in \mathbb{N}^* \forall k \geq k_0 \det(A_k) \neq 0$

Donc $(A_k)_{k \geq k_0} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et converge vers A (pour n'importe quelle norme).

Lemme: Soit $E \in \mathcal{E}V$ de dim finie, $F \subset E$ sEv, $x \in E \setminus F$. Alors $d(x, F)$ atteint.

Soit $\delta = d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|$. Alors $\exists (y_n)_n \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$\|y_n\| \leq \|x - y_n\| + \|x\|$ et $\exists M > 0$ tel que $\|y_n\| \leq M$ ($(\|x - y_n\|)_n$ bornée car convergente).

Alors $\forall n \in \mathbb{N} y_n \in F \cap \overline{B(0, M)}$ compact (fermé, borné en dim finie). Par Bolzano-Weierstrass,

$\exists \psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $y_{\psi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in F$. Donc $\|x - y_{\psi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x - y\| = \delta$.